ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2 (20-10-2017)

1. Να λυθεί η εξίσωση
$$y' - y + e^{-t}y^2 = 4e^t,$$
με δεδομένο ότι δέχεται μια λύση της μορφής $y_1(t) = ke^{\lambda t}$.

2. Να λυθεί το π.α.τ.
$$2x^3y' = y(y^2 + 3x^2), \quad y(1) = 1.$$

3. Να λυθούν τα π.α.τ.
$y' = |x - y|, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0,$
$y' = max\{x, y\}, \quad y(0) = 0, \quad x \geq 0.$

4. Να βρεθεί η εξίσωση μιας καμπύλης $y(x), x \geq 0$ που διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(x, y)$ τέμνει τον άξονα $0x$ στο σημείο B έτσι ώστε το τρίγωνο ABC με $C(0, x)$ να έχει σταθερό εμβαδόν.

5. Γιά την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση
$$y' = ay + b$$
όπου $a, b \in C([0, \infty))$, να αποδειχθεί ότι:
   - i) Αν $a(t) \leq m < 0, t \geq 0$ και η συνάρτηση b είναι φραγμένη, τότε κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$.
   - ii) Αν $a(t) \geq k > 0, t \geq 0$ και η συνάρτηση b είναι φραγμένη, τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση της εξίσωσης που είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$ και η λύση αυτή δίνεται από τον τύπο
$$y(t) = -\int_x^{+\infty} b(s)exp[\int_s^t a(u)du]ds, \quad x \geq 0.$$

6. Γιά την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση
$$y' + ay = q(t), \quad t \geq 0,$$
όπου $a \in R$ και $b \in C([0, \infty))$, με $lim_{t\to+\infty}q(t) = L$, να αποδειχθεί ότι:
   - i) Αν $a > 0$, τότε κάθε λύση της εξίσωσης τείνει προς το L/a για $t \to +\infty$.
   - ii) Αν $a < 0$, τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση της εξίσωσης που τείνει προς το L/a για $t \to +\infty$.

7. Αν y είναι ή λύση του π.α.τ.
$$y' + ay = q(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \geq 0.$$
και $z \in C[0, +\infty)$ μια συνάρτηση με
$$z' + az \leq q(t), \quad z(t_0) \leq y_0, \quad t \geq t_0,$$

να αποδειχθεί ότι $z(t) \leq y(t)$ για όλα τα $t \geq t_0$.
Εφαρμογή: Για την λύση του προβλήματος $y' + y = cost, y(0) = 1$, να αποδειχθεί ότι $2e^{-t} - 1 \leq y(t) \leq 1, t \in [0, +\infty)$.

8. Θεωρούμε την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$p(t)y' + q(t)y(t) = r(t), \quad t \in I := [a, b].$$

όπου $p, q, r \in C(I)$ με $p(a) = 0 = p(b)$, $p(t) > 0, t \in (a, b)$ και $q(t) > 0$, $t \in I$. Αν

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{dx}{p(x)} = \int_{b-\epsilon}^{b} \frac{dx}{p(x)} = \infty, \quad 0 < \epsilon < b - a,$$

να αποδειχθεί ότι:

i) κάθε λύση της εξίσωσης που ορίζεται στο (a, b) τείνει στο $r(b)/q(b)$ για $t \to b$.

ii) Μία απο τις λύσεις του $i)$ τείνει στο $r(a)/q(a)$ για $t \to a$ ενώ όλες οι άλλες τείνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

9. Αν $f \in C([0, T])$, να αποδειχθεί ότι για $t \in [0, T]$ ισχύει

$$\int_0^t \int_0^s \ldots \int_0^u f(u) du \ldots ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - s)^{n-1} f(s) ds.$$